

Bab 6 : Barisan dan Deret

► 6.1 Barisan Tak Hingga

Barisan : suatu susunan teratur dari bilangan-bilangan real.

Barisan tak hingga $a_1, a_2, \dots$ dapat dituliskan :

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ atau } \{a_n\}$$

Menyatakan barisan dalam notasi kurung

$$a). \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

Dapat diketahui pola pembilang dan pola penyebut sama, yakni bertambah 1 tiap langkah. Selain itu, nilai penyebut selisih 1 lebih besar. Maka barisan di atas dapat dinyatakan sebagai :

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

Konvergensi Barisan

* DEFINISI 6.1

Suatu barisan $\{a_n\}$ dikatakan konvergen ke limit L , ditulis :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Jika dan hanya jika untuk sebarang $\epsilon > 0$, terdapat suatu bilangan bulat positif N sehingga $|a_n - L| < \epsilon$ untuk $n \geq N$.

* Divergen : Barisan yang tak konvergen ke suatu limit berhingga.

* TEOREMA 6.1.2

Jika $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ konvergen ke limit L_1 dan L_2 , dan c adalah konstanta, maka berlaku :

$$(a). \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$(b). \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c L_1$$

$$(c). \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_1 \pm L_2$$

$$(d). \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_1 \cdot L_2$$

$$(e). \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{b_n} \right] = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0$$

* Contoh Soal :

Tentukan apakah barisan ini Konvergen atau Divergen.

$$(a). \left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

• Bagi pembilang & penyebut dengan n

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + 1/n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n} \\ &= \frac{1}{2+0} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sehingga barisan tersebut konvergen ke $\frac{1}{2}$.

Barisan Monoton

* DEFINISI 6.1.4

Suatu barisan $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ dikatakan ...

- Naik : $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$
- Tidak turun : $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$
- Turun : $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$
- Tidak naik : $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$

* Uji Monoton

- $a_{n+1} - a_n > 0$ naik
- $a_{n+1} - a_n < 0$ turun
- $a_{n+1} - a_n \geq 0$ tidak turun
- $a_{n+1} - a_n \leq 0$ tidak naik

* Contoh Soal : (Soal Latihan 6.1)

$$d). \left\{ \frac{n^2}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

• Menentukan 5 suku pertama

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3} & a_3 &= \frac{9}{7} & a_5 &= \frac{25}{11} \\ a_2 &= \frac{4}{5} & a_4 &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

• Menentukan Konvergensi

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 + \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \\ &= \infty\end{aligned}$$

maka, barisan divergen.

b). $\left\{ \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 3n - 1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

• Menentukan 5 suku pertama

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{6}{3} = 2 & a_3 &= \frac{38}{17} \\ a_2 &= \frac{18}{9} = 2 & a_4 &= \frac{66}{27} = \frac{22}{9} \\ a_5 &= \frac{102}{39} = \frac{34}{13}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \left(2, 2, \frac{38}{17}, \frac{22}{9}, \frac{34}{13} \right)$$

• Menentukan Konvergensi

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 3n - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2/n^2 + 2/n^2}{n^2/n^2 + 3n/n^2 - 1/n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 2/n^2}{1 + 3/n - 1/n^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

maka, barisan konvergen menuju 4.

* Latihan Soal :

a. $\left\{ \frac{n}{3n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

6.2 Deret Tak Hingga

Jumlah Deret Tak Hingga

* DEFINISI 6.2.1

Deret tak hingga dapat ditulis :

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

dengan $u_1, u_2, \dots, u_k$ adalah suku-suku deret tak

* DEFINISI 6.2.2

Misalkan $\{s_n\}$ barisan dari jumlahan parsial deret $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$. Jika barisan $\{s_n\}$ tersebut konvergen ke suatu limit S , maka deret tersebut dikatakan Konvergen dan S disebut jumlah deret itu.

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Jika barisan dari jumlahan parsial tersebut divergen, maka deret itu dikatakan divergen. Suatu deret divergen tidak mempunyai jumlah.

* TEOREMA 6.2.3 Deret Geometrik

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{k-1} + \dots$$

Konvergen, jika $|r| < 1$ dan divergen jika $|r| \geq 1$.

Jika deret konvergen, maka jumlah deretnya :

$$S_n = \frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{k-1} + \dots$$

* Latihan Soal

Dapatkan empat jumlah parsial pertama dari jumlahan parsial ke- n . Tentukan apakah deret konvergen/divergen, jika konvergen dapatkan nilainya.

(a). $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k-1}}$

$$S_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{2}{5^{k-1}} = \frac{2}{4} + \frac{2}{24} + \frac{2}{124} + \frac{2}{624}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{S_2}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{S_3}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{S_4}$

→ Uji Konvergensi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k-1}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{5^n - 1} = 0$$

6.3 Uji Konvergensi

* TEOREMA 6.3.4 : Konvergensi Deret -p

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{k^p} + \dots$$

- konvergen, jika $p > 1$
- divergen, jika $0 < p \leq 1$

* TEOREMA 6.3.5 : Uji Rasio

Jika diberikan deret $\sum u_k$ dengan suku-suku positif dan diasumsikan bahwa $\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$, maka:

- Jika $\rho < 1$, maka KONVERGEN
- Jika $\rho > 1$ atau $\rho = +\infty$, maka DIVERGEN
- Jika $\rho = 1$ bisa salah satu $\rightarrow$ perlu uji lainnya.

* TEOREMA 6.3.2 : Uji Integral

*) biasanya digunakan ketika Uji rasio menghasilkan $\rho = 1$.

misal $\sum u_k$ dengan suku-suku $\oplus$ dan $f(x)$ fungsi yang dihasilkan jika k diganti dengan x dalam rumus u_k .

Jika f deret turun dan kontinu dalam $[a, +\infty)$

maka :

$$\sum_{k \rightarrow +\infty} u_k \quad \text{dan} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Keduanya divergen atau keduanya konvergen